数理解析研究所講究録
347巻 1979年 27-38

Γ－葉層構造とtransverse projectable connectionsについて

北大 理 鈴木治夫

§1 序

Gをリー群，Eを主G－束とする。 f_0：G→G'をGからリー群G'への準同形写像とし，E'をf_0によってEにassociateされた主G'－束とする。主束における葉層構造は，平坦部分接続として特性づけられる[1]。この報告において，まずEが葉層構造をもつならば，E'も葉層構造をもち，さらにEがtransverse projectable connectionをもつならば，E'もまたそのような接続をもつことを示す。

半単純等質空間L/L_0にassociateされた2次のL_0－構造Qの局所同形変換の擬群をΓとする。多様体M上のΓ－葉層構造$\mathcal{F}$に対し，$\mathcal{F}$の局所しずめこみによるQのひきもどしから定まるM上の主L_0－束を$\tilde{Q}$とし，そのL－拡大を$\tilde{Q}^L$とかくことにする[3，4，5，6]。構造群の準同形写像によるtransverse projectable connectionの移行性を用いて，かなり大きい

範囲の Γ－葉層構造 $\mathcal{F}$ に対し，$\tilde{Q}^L$ に associate されたベクトル束 W を構成して，これが $\mathcal{F}$ の法ベクトル束 $V(\mathcal{F})$ を含み，その枠束 $P(W)$ が transverse projectable connection をもつようにできる．これは $V(\mathcal{F})$ の枠束における transverse projectable connection の一般化とみなされる．

以下，多様体と写像はすべて C^∞－級とする．

§2 部分接続と主束における葉層構造

M を n 次元多様体，$h: G \to G'$ をリー群の準同形写像とする．E を M の上の主 G－束とし，$p: E \to M$ をその射影写像とする．$\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$ を主 G－束 E の局所座標系とし，$\pi: U_\lambda \times G \to G$ を自然な射影写像とする．E 上の右 G－作用，$E \times G \to E$，$(u, g) \mapsto u \cdot g$ が

(i) $\quad p(u) = p(u \cdot g)$,

(ii) $\quad \pi \circ \phi_\lambda(u \cdot g) = (\pi \circ \phi_\lambda(u)) \cdot g, \qquad u \in p^{-1}(U_\lambda)$

によって定義される．

G の準同形写像 h を通しての G' の上の左作用によって，E に associate された主 G'－束を E' とする．すなわち

$$E' = E \times_G G'$$

である．あきらかに $E = E \times_G G$ であるから，写像 $id \times h$: $E \times G \to E \times G'$ はファイバー写像

$$h_E : E=(E\times G)/G \longrightarrow E'=(E\times G')/G'$$

をひきおこし，各 $u\in E$，$g\in G$ に対して

$$h_E(u\cdot g)=h_E(u)\cdot h(g)$$

となる．

主束 E における部分接続 [1] は，接ベクトル束 T(E) における部分ベクトル束 H で，次の条件をみたすものである：

(i) 各 $u\in E$ に対して，G_u を u を通るファイバーの接ベクトル空間とするとき，$H_u\cap G_u=\{0\}$．

(ii) 各 $u\in E$ および $g\in G$ に対して，E の上の g の右作用を R_g と表わすとき，$H_{u\cdot g}=(R_g)_* H_u$．

$H\subset T(E)$ の G－同変性により，各 $x\in M$ に対して，$p(u)=x$ とすると $F_x=p_* H_u$ が u によらないで定まり，$\{F_x \mid x\in M\}$ は部分ベクトル束 $F\subset T(M)$ となる．

H が E における部分接続ならば，h によって E に associate された主 G'－束 E' において部分接続 H' が定まり，各 $u\in E$ に対し

$$h_{E*}(H_u)=H'_{h_E(u)}$$

となる．このような H' は一意である．H が E における接続 $\mathcal{H}$ ならば，H' は E' における接続 $\mathcal{H}'$ となる．

E における部分接続 $H\subset T(E)$ は，H が部分ベクトル束として包合的であるとき平坦であるという．主 G－束 E は，そ

れが平坦な部分接続をもつとき，葉層的であるという．Hが平坦ならば，Hによって定まるE'の部分接続H'も平坦となる．HをEの平坦な部分接続とするとき，包合的部分ベクトル束$H \subset T(E)$の積分多様体はEの葉層構造を定める．これを$\mathcal{F}_E$とかく．$T(M)$の部分ベクトル束$p_*H = F$もまた包合的となり，その積分多様体はMの葉層構造$\mathcal{F}$を定める．$\mathcal{F}_E$を$\mathcal{F}$のリフトという．葉層構造$\mathcal{F}_E$をもつMの上の主G−束Eを，葉層構造をもつ多様体$(M, \mathcal{F})$の上の葉層的主G−束とよび，$E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$とかく．$\rho$によってEにassociateされた主$G'$−束$E'$も，また$(M, \mathcal{F})$の上の葉層的主$G'$−束となることが確かめられる．$E'$における$\mathcal{F}$のリフトを$\mathcal{F}_{E'}$とかく．

Hを主G−束Eの部分接続とする．Eの接続$\mathcal{H}$は，各$u \in E$に対して$H_u \subset \mathcal{H}_u$となるとき，Hに適合するということにする．平坦な部分接続Hに対して$\mathcal{H}$が適合するならば，$\mathcal{H}$はHによって定義される葉層構造に，transverseであるという．$\tilde{E}$を多様体Nの上の主G−束で，$\tilde{f}: \tilde{E} \to E$をG−束写像とする．各$u \in \tilde{E}$における接ベクトル部分空間族$\tilde{\mathcal{H}}_u = f_*^{-1}(\mathcal{H}_{f(u)}) \cap T_u(\tilde{E})$は，$\tilde{E}$における接続を定める．$\tilde{\mathcal{H}}$を$\mathcal{H}$からfによって引きおこされた接続とよび，$\tilde{\mathcal{H}} = f^*\mathcal{H}$とかき表わす．$E = E(M, p, G, \mathcal{F}_E)$を葉層構造をもつ多様体$(M, \mathcal{F})$上の葉層的主G−束とし，$\mathcal{H}$を$\mathcal{F}_E$にtransverseな接続とする．$\mathcal{H}$

は，それが局所的に$\mathfrak{F}$の局所しずめこみの上のG－束写像によって，像多様体上の接続から引きおこされた接続となるとき，<u>projectable</u>とよばれる． Hを$\mathfrak{F}_E$によって定まる平坦な部分接続とし，fを上に述べた$\mathfrak{F}$の局所しずめこみの上のG－束写像とすると，各$u \in E$に対して$H_u = \mathrm{Ker}(f_* | T_u(E))$となる。 したがって$\mathfrak{H}$はHに適合し，fは$\mathfrak{F}_E$の局所しずめこみとなる． 接続の局所的考察により，次の定理を得る．

<u>定理</u>1 $E(M, p, G, \mathfrak{F}_E)$を葉層的主G－束，$E'(M, p', G', \mathfrak{F}_{E'})$をリー群の準同形写像によって$E(M, p, G, \mathfrak{F}_E)$にassociateされた葉層的主－G'束とする． $E(M, p, G, \mathfrak{F}_E)$における接続$\mathfrak{H}$が$\mathfrak{F}_E$にtransverseならば，$\mathfrak{H}$によって定まる$E'(M, p', G', \mathfrak{F}_{E'})$における接続$\mathfrak{H}'$も$\mathfrak{F}_{E'}$にtransverseである． さらに$E(M, p, G, \mathfrak{F}_E)$におけるtransverseな接続$\mathfrak{H}$がprojectableならば，$E'(M, p', G', \mathfrak{F}_{E'})$におけるtransverseな接続$\mathfrak{H}'$もまたprojectableとなる．

§3 Γ－葉層構造

Γをq次元多様体B上に作用する局所変換の擬群とし，$\mathfrak{F}$をn次元多様体M上の余次元qのΓ－葉層構造とする． すなわちMの開集合U_αからBへのしずめこみ

$$f_\alpha : U_\alpha \to B$$

の極大族であって，

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ がMの開被覆となり，

(ii) 各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ $(\alpha, \beta \in \Lambda)$ に対して，元 $\gamma^x_{\beta\alpha} \in \Gamma$ が存在し，x のある近傍の上で $f_\beta = \gamma^x_{\beta\alpha} \circ f_\alpha$ となるものである。

Bの点の f_α による逆像は $\mathcal{F}$ の"局所的"な葉であり，$\ker(f_{\alpha *})$ は $\mathcal{F}$ に対する部分接ベクトル束 $F \subset T(M)$ を定める。剰余ベクトル束 $V(\mathcal{F}) = T(M)/F$ を $\mathcal{F}$ の法ベクトル束という。

$\Gamma(B)$ をBの局所微分位相同形写像の擬群とし，$0 \in B$ を固定する。各整数 $k \geq 1$ に対し，$P^k(B)$ を0のまわりの局所微分位相同形写像 $f \in \Gamma(B)$ の k-ジェット $j^k_0(f)$ 全体の集合とする。$G^k(q) = \{ j^k_0(f) \in P^k(B) \mid f(0) = 0 \}$ とおく。$\mathbb{R}^n$ 上の $GL(q;\mathbb{R})$-値関数の r-ジェットのなす群を $(GL(q;\mathbb{R}))^r_n$ とかくことにすれば，k に関する帰納法により，$G^k(q) \subset (GL(q;\mathbb{R}))^{k-1}_n$ がいえる。$P^k(B)$ は，射影写像 $\pi^k ; P^k(B) \to B$ を $\pi^k(j^k_0(f)) = f(0)$ と定めることにより，B上の自然な主 $G^k(q)$-束となる。0のまわりに作用する局所微分位相同形写像 $f \in \Gamma(B)$ は，$j^k_0(g) \in P^k(B)$ に対して

$$f^{(k)}(j^k_0(g)) = j^k_0(f \circ g)$$

と定めることによって，自然に $P^k(B)$ の局所束同形写像 $f^{(k)}$ に拡げられる。$f^{(k)}$ を f の prolongation とよぶ。

M上の Γ-葉層構造 $\mathcal{F}$ において，擬群 Γ を $\Gamma(B)$ におきかえて得られる $\Gamma(B)$-葉層構造を $\mathcal{F}$ とする。$U \subset M$ を開集合と

し，

$$P^k(\hat{\mathcal{F}}) = \{ j_x^k(f_U) \mid f_U \in \hat{\mathcal{F}},\ x \in U,\ f_U(x) = 0 \}$$

とおく．　$j_x^k(f_U) \in P^k(\hat{\mathcal{F}})$，$j_0^k(h) \in G^k(q)$ とするとき，$G^k(q)$ は $P^k(\hat{\mathcal{F}})$ の上に右から $j_x^k(f_U) \cdot j_0^k(h) = j_x^k(h^{-1} \circ f_U)$ によって作用し，$P^k(\hat{\mathcal{F}})$ は，射影写像 $p^k : P^k(\hat{\mathcal{F}}) \to M$ を $p^k(j_x^k(f_U)) = x$ と定めることにより，M 上の主 $G^k(q)$－束となる．　実際 $\hat{\mathcal{F}}$ の局所しずめこみの近傍 U をとるとき，$G^k(q)$－束同形

$$f_U^*(P^k(B)) \xrightarrow{\cong} P^k(\hat{\mathcal{F}})|U$$

が $j_0^k(g) \in P^k(B)$ に対して，$(x, j_0^k(g)) \mapsto j_x^k(g^{-1} \cdot f_U)$ によって得られ，これが $P^k(\hat{\mathcal{F}})$ の局所自明性を与える．

<u>定理</u> 2　$k \geq 1$ に対し，$P^k(\hat{\mathcal{F}})$ は $V(\mathcal{F})$ の $(k-1)$－ジェット束，$J^{k-1}(V(\mathcal{F}))$ に associate された主 $G^k(q)$－束となる．

証明　$\mathcal{F}$ の局所しずめこみ $f_\alpha : U_\alpha \to B$ に対し，$f_\alpha(U_\alpha)$ が B の局所座標近傍となると仮定してよい．　$f_\alpha^*(T(B))$ は $V(\mathcal{F})$ の U_α 上の局所座標を与える．　各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し $\gamma_{\beta\alpha}^x \in \Gamma \subset \Gamma(B)$ が存在し，x の近傍で $f_\beta = \gamma_{\beta\alpha}^x \circ f_\alpha$ となることから，$\gamma_{\beta\alpha *}^x$ は局所座標 $f_\alpha^*(T(B))$ から $f_\beta^*(T(B))$ への座標変換となる．　したがって，$P^1(\hat{\mathcal{F}})$ は $V(\mathcal{F})$ に associate された主 $GL(q; R)$－束となる．　各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し，$J^{k-1}(V(\mathcal{F}))$ の局所座標 $J^{k-1}(f_\alpha^*(T(B)))$ から $J^{k-1}(f_\beta^*(T(B)))$ への座標変換は，

$$j_{f_\alpha(x)}^{k-1}(\gamma_{\beta\alpha *}^x) = j_{f_\alpha(x)}^{k-1}(j_{f_\alpha(x)}^1(\gamma_{\beta\alpha}^x))$$

となり，自然な同一視 $G^k(q) \subset (GL(q;\mathbb{R}))^{k-1}_q$ の下で右辺は $j^k_{f_\alpha(x)}(\gamma^x_{\beta\alpha})$ とみなされる．これは $P^k(\mathcal{F})$ の局所座標 $f^*_\alpha(P^k(B))$ から $f^*_\beta(P^k(B))$ への座標変換となる．

証明終

§4 Transverse projectable connection の構成

L を半単純リー群，L_0 をその閉部分群とし，L/L_0 が連結な等質空間であるとする．L のリー環 $\mathfrak{l}$ が次数つきリー環構造 $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ をもち，$\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ が L_0 のリー環となるとき，L/L_0 を半単純平坦等質空間という．$\mathfrak{l}$ は L/L_0 に associate された次数つきリー環とよばれる．$\mathrm{Dim}\, \mathfrak{g}_{-1} = q$ とするとき，中への準同形写像 $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^q \to L/L_0$ が $x \mapsto (\exp x) L_0$ によって定まる．これを用いて，自然写像 $\iota : L_0 \to G^2(q)$ が $\iota(a) = j_0^2(\mathrm{Exp}^{-1} \cdot a \cdot \mathrm{Exp})$ によって定義され，ι は単射準同形写像であることがよく知られている [5]．ι によって L_0 は $G^2(q)$ の部分群とみなされる．

B 上の主 $G^2(q)$－束 $P^2(B)$ の L_0－reduction Q を半単純平坦等質空間 L/L_0 に associate された２次の L_0－構造とよぶ．$\gamma^{(2)}$ を $\gamma \in \Gamma(B)$ の２次 prolongation とし，$\Gamma = \{ \gamma \in \Gamma(B) \mid \gamma^{(2)} Q \subset Q \}$ とかくことにする．これを Q の局所同形写像の擬群とよぶ．以下，$\mathcal{F}$ はこの Γ に対する多様体 M 上の Γ－葉層構造を表わすものとする．$\gamma^{(2)}$ は L_0－reduction Q を保つから，$\{f^*_\alpha Q\}_{\alpha \in \Lambda}$ は

M上の主L_0－束$\tilde{Q}$を定め，これはまた$P^2(\mathfrak{F})$のL_0－reduction となる。　$Q^L=Q\times_{L_0}L$，$\tilde{Q}^L=\tilde{Q}\times_{L_0}L$とかき，$p^L: Q^L\to M$，$\tilde{p}^L:\tilde{Q}^L\to M$をその射影写像とする。　また$\hat{\gamma}^{(2)}: Q^L|U\to Q^L|\gamma(U)$を，$\gamma\in\Gamma$によって引きおこされた$Q^L$の局所同形写像，$\hat{f}_\alpha^{(2)}:\tilde{Q}^L|U_\alpha\to Q^L|f_\alpha(U_\alpha)$を$f_\alpha\in\mathfrak{F}$によって引きおこされた局所束写像を表わすものとする。

可換リー環$\mathfrak{g}_{-1}$の$\mathfrak{l}$上の adjoint representation に関するコホモロジーを$H^{p,q}(\mathfrak{l})=H^{p,q}(\mathfrak{g}_{-1},\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_{-1})$，$H(\mathfrak{l})=\sum H^{p,q}(\mathfrak{l})$とする。これは$\mathfrak{l}$の Spencer コホモロジーとよばれる。

<u>定理</u>3　$H^{2,1}(\mathfrak{l})=0$とする。

(i)（田中－落合 [5, 6]）Q^L上の接続ωが存在し，$\gamma\in\Gamma$に対して$\hat{\gamma}^{(2)*}\omega=\omega$となる。　ωはL/L_0形 Cartan normal connection とよばれるものである。

(ii)（西川－佐藤－竹内 [3, 4]）$\{\hat{f}_\alpha^{(2)*}\omega\}_{\alpha\in\Lambda}$は$\tilde{Q}^L$上の大域的接続$\tilde{\omega}$を定める。

さらに$\tilde{\omega}$は葉層的主L－束に関する接続となることが，次の補題により示される。

<u>補題</u>4　$\tilde{Q}^L$において$\mathfrak{F}$のリフト$\mathfrak{F}(\tilde{Q}^L)$が存在し，定理3(ii)の接続$\tilde{\omega}$は$\mathfrak{F}(\tilde{Q}^L)$に関し，transverse projectable となる。

証明　$\hat{F}=\{v\in T(\tilde{Q}^L)\mid \tilde{p}^L(v)\in F,\ \tilde{\omega}(v)=0\}$とおく。　$\mathfrak{F}$の局所しずめこみ$f_\alpha: U_\alpha\to B$をとり，$F|U_\alpha$および$Q^L|f_\alpha(U_\alpha)$が自明となる

ようにすれば，$\tilde{F}|U_\alpha$が自明となり，$\tilde{\mathcal{F}}$の局所自明性がいえるから，$\tilde{F}$は$T(\tilde{Q}^L)$の部分ベクトル束となる． 局所1ずめこみ写像族$\{\tilde{f}_\alpha^{(2)}: \tilde{Q}^L|U_\alpha \to Q^L|f_\alpha(U_\alpha)\}$と局所同形写像族

$$\{(\hat{\gamma}_{\beta\alpha}^{x})^{(2)} \mid \alpha, \beta \in \Lambda,\ x \in U_\alpha \cap U_\beta\}$$

は$\tilde{F}$の積分多様体族を与えるから，$\tilde{Q}^L$の葉層構造$\mathcal{F}(\tilde{Q}^L)$が定まる． $\tilde{F}$の定め方から，$\mathcal{F}(\tilde{Q}^L)$は$\tilde{p}^L: \tilde{Q}^L \to M$に関する$\mathcal{F}$のリフトであり，$\tilde{\omega}$は$\mathcal{F}(\tilde{Q}^L)$に関してtransverseとなる． さらに$\tilde{\omega}|U_\alpha = \tilde{f}_\alpha^{(2)*}\omega$であるから，$\tilde{\omega}$はprojectableである． 証明終

代数的方法により，次の補題が証明される．

<u>補題</u>5 Lをリー群，$L_0 \subset L$を部分群とし，Vを多様体Mの上のベクトル束で，L_0を構造群にもつとする． $\Phi: L \to GL(r; \mathbb{R})$を線形表現で$\Phi|L_0$がfaithfulであるとする． PをVにassociateされた主L_0－束とし，P^LをPのL－拡大とするとき，P^LにassociateされたM上のベクトル束Wが存在し，Vがその部分ベクトル束となる．

以上の準備の下で，次の定理が得られる．

<u>定理</u>6 L/L_0をq次元半単純平坦等質空間，$\mathfrak{l}$をL/L_0にassociateされた次数つきリー環とし，$H^{2,1}(\mathfrak{l}) = 0$とする． $\Phi: L \to GL(r; \mathbb{R})$を線形表現で$\Phi|L_0$がfaithfulとなるものとする． また$\Gamma$を$L/L_0$にassociateされた，$q$次元多様体上の2次の$L_0$－構造$Q$の局所同形写像から成る擬群とする．$\mathcal{F}$が$n$

次元($n \geqq q$)多様体上の，余次元qのΓ-葉層構造ならば，$\hat{Q}^L$にassociateされたベクトル束Wが存在し，$\mathcal{F}$の法ベクトル束，$V(\mathcal{F})$を含み，その枠束$P(W)$がtransverse projectable connectionをもつ。

証明　定理2により，$P^2(\mathcal{F})$は$J^1(V(\mathcal{F}))$にassociateされた$G^2(q)$-束であり，したがって$P^2(\mathcal{F})$のL_0-reduction $\hat{Q}$も$J^1(V(\mathcal{F}))$にassociateされた主L_0-束である。　補題5のVとして$J^1(V(\mathcal{F}))$，Pとして$\hat{Q}$をとると，$\hat{Q}^L$にassociateされたベクトル束Wが存在し，$J^1(V(\mathcal{F}))$を部分ベクトル束として含み，したがって$V(\mathcal{F})$を含む。　また$\hat{Q}^L$は補題4によってtransverse projectable connectionをもつ。　定理1によってこの性質はWの枠束$P(W)$に移される。

証明終

任意の半単純リー環$\mathfrak{l}$に対して，線形表現ρをもつLの存在がわかっている。

文　　献

[1] F. W. Kamber and Ph. Tondeur, Foliated bundles and characteristic classes, Lecture Notes in Mathematics 493, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.

[2] P. Molino, Classe d'Atiyah d'un feuilletáge et connexions

transverses projetables, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 272 (1971), 779-781.

[3] S. Nishikawa and H. Sato, On characteristic classes of riemannian, conformal and projective foliations, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 223-241.

[4] S. Nishikawa and M. Takeuchi, Γ- foliations and semisimple flat homogeneous spaces, Tôhoku Math. J. (2) 30 (1978), 307-335.

[5] T. Ochiai, Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 159-193.

[6] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces, J. Math. Soc. Japan 17 (1965), 105-139.